Corentin Bergeron ENS Rennes

Disques de Gershgorin et continuité des racines d'un polynôme

Développement très sympa sur la continuité des racines d'un polynôme (et des valeurs propres) avec une application à une localisation plus avancée des valeurs propres (ou des racines). On utilise dans ce développement un peu d'analyse complexe pour démontrer la continuité des valeurs propres, ce qui est assez original, et peu calculatoire.

Pour le recasage, les leçons 144, 153 et 204 me semblent très pertinentes. Bien qu'on utilise le théorème de Rouché, je ne pense pas qu'un recasage en 245 soit possible (mais n'hésitez pas à le mettre en application dans votre plan).

I - Prémices

Théorème 1 *Rouché*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f,\ g$ des fonctions holomorphes sur Ω. Soit K un compact de Ω. On suppose la condition suivante :

$$\forall z \in \partial K,\ |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

Alors f et g possèdent le même nombre de zéros comptés avec multiplicités dans K.

II - Le développement

Théorème 2

Soit P un polynôme complexe de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\alpha > 0$, il existe ε tel que, pour tout $Q \in \mathbb{C}_{=n}[X]$ vérifant

$$\|P - Q\| < \varepsilon,$$

on ait

$$\min_{\sigma \in} \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_{i,P} - \mu_{\sigma(i),Q}| < \alpha.$$

Preuve [Ser] :

Étape 1 : Localisation de la multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et λ une racine de P, de multiplicité m. Notre but est d'utiliser le théorème de Rouché. Posons pour cela $\rho < \operatorname{dist}\left(\lambda, \mathrm{R}(P) \setminus \{\lambda\}\right)$ et $\overline{D}_\rho = \overline{D}(\lambda, \rho)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ de sorte que :

$$\|P - Q\|_{\infty, \overline{D}_\rho} < \varepsilon.$$

Comme $\partial\overline{D}_\rho$ est compact, $|P|$ atteint son minimum P_0, non nul (car $\mathrm{R}(P)\cap\partial\overline{D} = \varnothing$). Ainsi, pour ε assez petit :

$$\forall z \in \partial\overline{D}_\rho, \quad |Q(z)| > P_0 - \varepsilon > \varepsilon.$$

On en déduit alors :

$$\forall z \in \partial\overline{D}_\rho, \quad |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|,$$

et on peut appliquer le théorème de Rouché : Q possède des racines dans $\overline{D}_\rho$ de multiplicité totale m.

Étape 2 : Continuité partielle des racines

Soit $P \in \mathbb{C}_{=n}[X]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ ses racines de multiplicité respective $m_1, \dots, m_r$. On notera pour plus de clarté $\mu_{1,P}, \dots, \mu_{n,P}$ ses racines comptées sans multiplicité.Soit $\alpha > 0$.

Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, on construit ρ_i (comme à l'étape 1) et on pose $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_r, \alpha\}$. Par l'étape 1,

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \exists \varepsilon_i > 0,\ \forall Q \in \mathbb{C}_{=n}[X], \quad \|P - Q\|_{\infty, \overline{D}_{\rho_i}} < \varepsilon_i,$$

on a donc $\forall i \in [\![1, r]\!], \quad |\overline{D}_i \cap \mathrm{R}(Q)| = m_i$.

Ce qui a été fait montre que si $\overline{D} := \bigcup \overline{D}_{\rho_i}$, et si $\|P-Q\|_{\infty,\overline{D}} < \varepsilon = \min_{1^l eqi}\{\varepsilon_i\}$, alors pour toutes m_i racines λ_i, on peut associer exactement m_i racines de Q. De plus, par le choix de ρ, une racine de Q ne peut être associée qu'une et une seule fois. En faisant le compte des racines, on obtient finalement le résultat :

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad |\mu_{\sigma(i),P} - \mu_{i,Q}| < \rho \leq \alpha.$$

Pour finir, il reste à voir que ce que l'on a montré pour la norme sup sur $\overline{D}$ est vraie pour n'importe quelle norme dans $\mathbb{C}_{\leq n}[X]$. Ceci est possible par la dimension finie.

Théorème 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $D_i(A),\ i \in [\![1, n]\!]$ ses n disques de Gershgorin associés. On pose $D(A)$ la réunion de ces disques (fermés) et on note $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ les composantes connexes de $D(A)$, composées chacune de $m_1, \dots, m_r$ disques. Alors, chaque composante $\mathcal{C}_i$ possède exactement m_i valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Preuve :

On considère la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, et on note $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_n)$. On regarde le chemin γ, continu, défini par :

$$\gamma(t) = (1-t)D + tA$$

On remarque que $\gamma(0) = D$, $\gamma(1) = A$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$D_i(\gamma(t)) = \overline{B}\Big(a_{ii}, t\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\Big) \subseteq \overline{B}\Big(a_{ii}, \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\Big) = D_i(A),$$

donc

$$\mathcal{D}(\gamma(t)) \subseteq \mathcal{D}(A).$$

On note $I = \{t \in [0, 1] : \gamma(t)$ possède m_j valeurs propres dans $\mathcal{C}_j$, pour tout $j\}$. Pour faciliter la compréhension, notons $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ les valeurs propres de $\gamma(t)$.

Montrons que $I = [0, 1]$. Nous allons procéder par connexité.

$\star$ $0 \in I$ car $D = \gamma(0)$, et donc ses valeurs propres sont exactement les centres des disques $D_i(A)$, il y a bien m_j valeurs propres dans chaque $\mathcal{C}_j$.

Formulons maintenant les conditions d'ouverture et de fermeture de I.
$\star$ I est fermé si pour toute suite (t_k) I telle que $t_k \to t_0$, on a $t_0 \in I$
$\star$ I est ouvert si pour tout $t_0 \in I$, on a $\widetilde{t} \in I$ pour $\widetilde{t}$ assez proche de t_0.

Les deux cas reviennent donc à montrer que si on a t dans I,alors pour s assez proche de t, on a $s \in I$, dans le premier cas t_k joue le rôle de t et t_0 joue le rôle de s, et dans le second cas, t_0 joue le rôle de t et $\widetilde{t}$ le rôle de s.

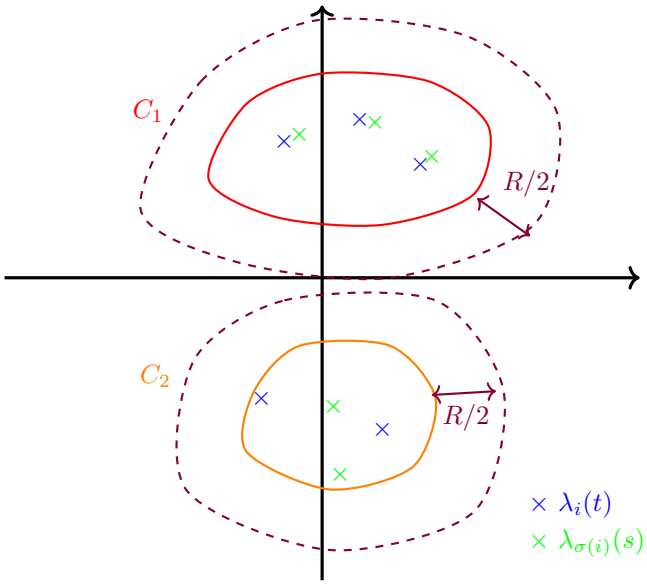
Considérons donc $t \in I$, et posons :

$$R = \min_{1 \leq j \leq r} \operatorname{dist}\left(\mathcal{C}_j, \sigma(A) \setminus \mathcal{C}_j\right).$$

La continuité de γ et la continuité du spectre assure l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall |t - s| < \delta,\ \exists \sigma_s \in \mathfrak{S}_n, \quad |\lambda_i(t) - \lambda_{\sigma(i)}(s)| < R/2.$$

La définition de R impose que pour chaque valeur propre de $\gamma(t)$, il y a une unique valeur propre de $\gamma(s)$ associée qui vit dans la même composante. Cela montre que pour tout j, $\gamma(t)$ a exactement m_j racines dans $\mathcal{C}_j$ (en a au moins m_j, mais en regardant les autres composantes connexes, on s'aperçoit qu'il ne manque aucune racine). Le dessin ci-contre permettra de convaincre plus facilement le jury :



Conclusion : I est non vide, fermé et ouvert, c'est donc $[0, 1]$ par connexité.

III - Remarques

1 - Développement qui peut être très long s'il n'est pas assez travaillé. Suivant la leçon, vous pouvez présenté la continuité des racines ou l'application aux composantes en premier, puis utiliser le temps restant pour présenter rapidement l'autre.

2 - Il m'a été assez difficile de présenter de manière succinte et claire la fermeture et l'ouverture de I, qui reposent sur le même principe. N'hésitez pas à travailler ce point précis, et à le présenter à vos camarade pour

voir s'il ne reste pas des points obscure ou peu clairs.

3 - Une version plus abordable de ce développement a été faite par Thomas Courant (Agreg Math), où il démontre la continuité des racines de manière beaucoup plus algébrique, par une récurrence, et où sa démonstration des composantes connexes et moins synthétique que la mienne. L'avantage est qu'on y prend plus le temps de développer les arguments (même si je pense que le développment reste très long), le désavantage est qu'il est plus calculatoire.

4 - Il faut faire un peu attention à ce qu'on a démontré. La continuité des racines que l'on a montré suppose qu'on compare des polynômes de même degré. Si les polynômes sont de degré différents, alors il reste une continuité partielle au voisinages des racines du polynôme de plus petit degré (l'étape 1 fonctionne toujours !).

5 - La continuité des racines que l'on a montré revient à la continuité des racines dans l'espace $\mathbb{C}_\sim$ qui est le quotient de $\mathbb{C}^n$ par la relation d'égalité à une permutation près. La distance utilisée dans le théorème est alors la distance de Hausdorff. En ayant ce point de vue, la démonstration sur les composantes connexes devient immédiate, puisque qu'on a directement une application continue d'un espace métrique dans un autre (inutile alors de montrer que $I = [0, 1]$, puisque la continuité assure de rester dans la même composante). J'ai essayé de garder une preuve semblable à celle de Thomas Courant, car cela évité de quotienter.

6 - Avoir une idée de la démonstration du théorème de Rouché (au moins dans le cas holomorphe comme je l'ai écrit, ou dans le cas polynômial pour simplifier) peut être utile. Une preuve standard est faite dans le [Tau].

IV - Références

[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel
[Ser] : *Matrices, theory and applications*, Jean-Pierre Serre
[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algébrie*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier